PART3　三角形の面積，２つのベクトルに垂直な単位ベクトル

3 ［1］ A(2, 1, 3)，B(2, −2, 0)，C(4, 2, −4) とするとき，内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ を求めよ。また，△ABC の面積を求めよ。

［2］ 2 つのベクトル $\vec{a}=(1,\ -2,\ 2)$，$\vec{b}=(2,\ 3,\ -10)$ の両方に垂直な単位ベクトルを求めよ。

Point Pickup

［1］ $\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ のなす角を θ とすると

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}\sqrt{b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^2}}$$

△ABC の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\angle BAC=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$$

［2］ $\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ について

$$\vec{a}\perp\vec{b}\iff\vec{a}\cdot\vec{b}=0\iff a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$$

が成り立つ。

第12講　PART3　確認問題

1　A(1, 1, 3), B(−1, 2, 1), C(−5, 3, 1) とするとき，
内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ を求めよ。また，△ABC の面積 S を求めよ。

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\boxed{アイ}$

$S=\boxed{ウ}\sqrt{\boxed{エ}}$

2　2つのベクトル $\vec{a}=(-2,\ 1,\ 1)$, $\vec{b}=(1,\ -1,\ 1)$ の両方に垂直な単位ベクトル $\vec{e}$ を求めよ。

$$\vec{e}=\left(\frac{\boxed{オ}}{\sqrt{\boxed{カキ}}},\ \frac{\boxed{ク}}{\sqrt{\boxed{カキ}}},\ \frac{\boxed{ケ}}{\sqrt{\boxed{カキ}}}\right),$$
$$\left(-\frac{\boxed{コ}}{\sqrt{\boxed{カキ}}},\ -\frac{\boxed{サ}}{\sqrt{\boxed{カキ}}},\ -\frac{\boxed{シ}}{\sqrt{\boxed{カキ}}}\right)$$

PART3　三角形の面積，2つのベクトルに垂直な単位ベクトル

3　[1]　A(2, 1, 3)，B(2, −2, 0)，C(4, 2, −4) とするとき，内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ を求めよ。また，△ABC の面積を求めよ。

[2]　2つのベクトル $\vec{a}=(1,\ -2,\ 2)$，$\vec{b}=(2,\ 3,\ -10)$ の両方に垂直な単位ベクトルを求めよ。

[1]　$\overrightarrow{AB}=(0,\ -3,\ -3)$，$\overrightarrow{AC}=(2,\ 1,\ -7)$

よって　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0\times2+(-3)\times1+(-3)\times(-7)=18$

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{0^2+(-3)^2+(-3)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

$$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{2^2+1^2+(-7)^2}=\sqrt{54}=3\sqrt{6}$$

よって　$\cos A=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{18}{3\sqrt{2}\times3\sqrt{6}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\sin A>0$ より $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

したがって　$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin A=\dfrac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times3\sqrt{6}\times\dfrac{\sqrt{6}}{3}=9\sqrt{2}$

(△ABC の面積を求める別解)

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{18\times54-18^2}=\frac{1}{2}\sqrt{18\times36}=9\sqrt{2}$$

[2]　求める単位ベクトルを $\vec{e}=(x,\ y,\ z)$ とおく。

$\vec{a}\perp\vec{e}$ より　$\vec{a}\cdot\vec{e}=0$　　よって　$x-2y+2z=0$ …… ①

$\vec{b}\perp\vec{e}$ より　$\vec{b}\cdot\vec{e}=0$　　よって　$2x+3y-10z=0$ …… ②

$|\vec{e}|=1$ より　$|\vec{e}|^2=1^2$　　よって　$x^2+y^2+z^2=1$ …… ③

①，②より　$x=2z$，$y=2z$

これらを③に代入して　$9z^2=1$　　$z^2=\dfrac{1}{9}$　　よって　$z=\pm\dfrac{1}{3}$

よって，求める単位ベクトルは

$$\vec{e}=\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right),\ \left(-\frac{2}{3},\ -\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3}\right)$$

第 12 講　PART3　確認問題 解答

1　**[正解]** アイ：18，ウ：3，エ：2

[解説]

$$\overrightarrow{AB}=(-2,\ 1,\ -2)$$

$$\overrightarrow{AC}=(-6,\ 2,\ -2)$$

よって

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(-2)\times(-6)+1\times2+(-2)\times(-2)$$ [A]

$$=18$$

また

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-2)^2+1^2+(-2)^2}=3$$

$$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(-6)^2+2^2+(-2)^2}=2\sqrt{11}$$

$\angle BAC=A$ とすると

$$\cos A=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{18}{3\times2\sqrt{11}}=\frac{3}{\sqrt{11}}$$ [A]

$\sin A>0$ より

$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{\sqrt{11}}\right)^2}=\sqrt{\frac{2}{11}}$$

したがって

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin A$$ [B]

$$=\frac{1}{2}\times3\times2\sqrt{11}\times\sqrt{\frac{2}{11}}$$

$$=3\sqrt{2}$$

（S を求める別解）

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$$ [B]

$$=\frac{1}{2}\sqrt{9\times44-18^2}=\frac{1}{2}\sqrt{36(11-9)}$$

$$=3\sqrt{2}$$

[A]　$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル
$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$
のなす角を θ とすると

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$
$$=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$
$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$
$$=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

[B]　$\triangle ABC$ の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\angle BAC$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$$

2

[正解] オ：2，カキ：14，ク：3，ケ：1，コ：2，
サ：3，シ：1

[解説]

$\vec{e}=(x,\ y,\ z)$ とおく。

$\vec{a}\perp\vec{e}$ より　$\vec{a}\cdot\vec{e}=0$

よって　$-2x+y+z=0$ ……①　[C]

$\vec{b}\perp\vec{e}$ より　$\vec{b}\cdot\vec{e}=0$

よって　$x-y+z=0$ ……②　[C]

$|\vec{e}|=1$ より　$|\vec{e}|^2=1^2$

よって　$x^2+y^2+z^2=1$ ……③

①，②より　$y=\dfrac{3}{2}x,\ z=\dfrac{x}{2}$

これらを③に代入して

$$x^2+\left(\frac{3}{2}x\right)^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2=1$$

$$x^2=\frac{4}{14}$$

よって　$x=\pm\dfrac{2}{\sqrt{14}}$

したがって，求める単位ベクトル $\vec{e}$ は

$$\boldsymbol{\vec{e}=\left(\frac{2}{\sqrt{14}},\ \frac{3}{\sqrt{14}},\ \frac{1}{\sqrt{14}}\right),}$$

$$\boldsymbol{\left(-\frac{2}{\sqrt{14}},\ -\frac{3}{\sqrt{14}},\ -\frac{1}{\sqrt{14}}\right)}$$

[C]　$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル
$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$
について
$\vec{a}\perp\vec{b}\iff\vec{a}\cdot\vec{b}=0$
$\iff a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$